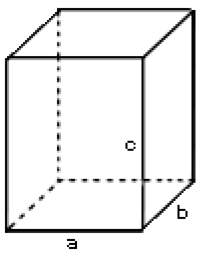
Задача B9 — Стереометрия

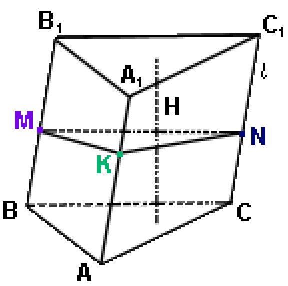
На данный момент этот раздел содержит обобщенный материал по всему курсу стереометрии. Стереометрия - раздел геометрии, в котором изучаются фигуры в пространстве. В будущем этот материал будет разделен на несколько - по конкретной тематике.

Прямоугольный параллелепипед.



Vпарал = abc.

Призма.



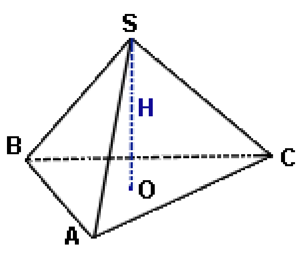
MKN - перпендикулярное (к ребру $CC1$) сечение;

Vпризм = SH, где S - площадь основания, H - высота призмы;

Vпризм = $S\perp l$, где $S\perp$ - площадь перпендикулярного сечения MKN;

Площадь боковой поверхности призмы: Sбок. призм = $P\perp l$, где $P\perp$ - периметр перпендикулярного сечения MKN;

Пирамида.



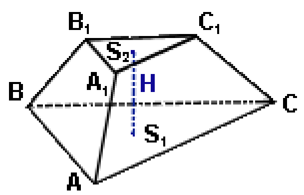
Vпирам = $1/3SH$, где S - площадь основания, H - высота пирамиды;

Если пирамида правильная (т.е. в основании правильный многоугольник, а все боковые грани -

равные равнобедренные треугольники), то площадь боковой поверхности равна:

$S_{\text{бок.пр.пирам}} = ½ Ph$, где P - периметр основания, h - высота боковой грани (апофема).

Усеченная пирамида.

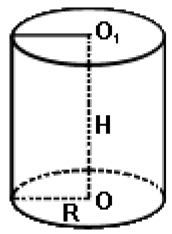


$V_{\text{ус.пирам}} = 1/3H(S1 + \sqrt{S1S2} + S2)$, где H - высота, $S1$, $S2$ - площади оснований усеченной пирамиды;

Если усеченная пирамида - правильная (т.е. сечение проводили с правильной пирамидой), то площадь боковой поверхности равна:

$S_{\text{бок.ус.пирам}} = ½ (P1 + P2)h$, где $P1$, $P2$ - периметры оснований, h - высота боковой грани (апофема).

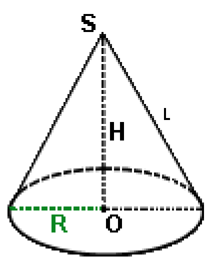
Цилиндр.



$V_{\text{цил}} = \pi R2H$, где R - радиус основания, H - высота цилиндра;

Площадь боковой поверхности цилиндра $S_{\text{бок.пов.цил}} = 2\pi RH$, где R - радиус основания, H - высота цилиндра.

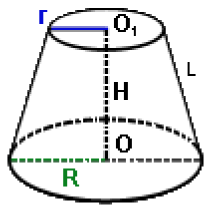
Конус.



$V_{\text{кон}} = 1/3\pi R2H$, где R - радиус основания, H - высота конуса;

Площадь боковой поверхности конуса $S_{\text{бок.кон}} = \pi Rl$, где R - радиус основания, l - образующая конуса.

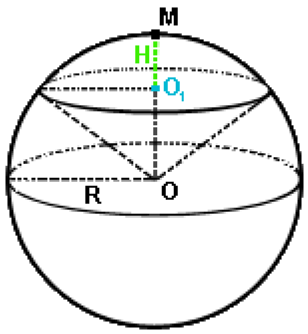
Усеченный конус.



Vус.кон = $1/3\pi H(R2 + Rr + r2)$, где R, r - радиусы оснований, H - высота усеченного конуса;

Площадь боковой поверхности усеченного конуса Sбок.ус.кон = $\pi(R + r)l$, где R, r - радиусы оснований, l - образующая усеченного конуса.

Шар, сфера.



Объем шара Vшара = $4/3\pi R3$, где R - радиус шара;

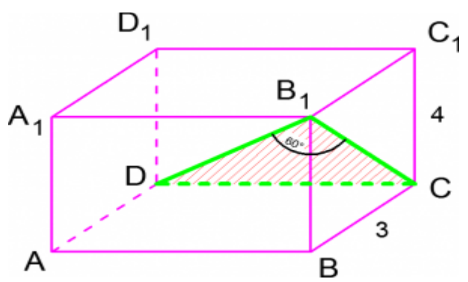
Объем шарового сегмента Vшар.сегм = $\pi H2(R - 1/3H)$, где $H = MO1$ - высота шарового сегмента, $R = MO$ - радиус шара;

Объем шарового сектора Vшар.сект = $2/3\pi R2H$, где $H = MO1$ - высота сегментной части сектора, $R = MO$ - радиус шара;

Площадь сферы Sсф = $4\pi R2$, где R - радиус сферы;

Площадь сферического сегмента Sсф.сегм = $2\pi RH$, где R - радиус сферы, $H = MO1$ - высота сегмента.

Пример 1. Найдите диагональ прямоугольного параллеле-пипеда, если она наклонена к его грани под углом 60^0, а стороны этой грани равны 3 и 4.



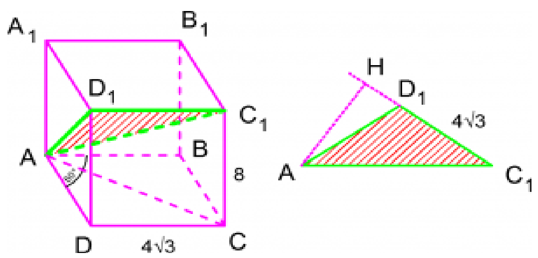
Решение. Так как $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед, то $DC \perp BCC_1$, а значит и любой прямой, лежащей в этой плоскости, в том числе и CB_1. То есть треугольник DCB_1 — прямоугольный, гипотенузой в нем будет являться искомая диагональ DB_1.

Из прямоугольного треугольника CBB_1 находим гипотенузу $CB_1 = \sqrt{BC^2 + BB_1^2} = 5.$

Для прямоугольного треугольника DCB_1 имеем $\cos DB_1C = \frac{CB_1}{DB_1}$, то есть $DB_1 = \frac{5}{\cos 60^0} = 10.$

Ответ: 10.

Пример 2. Основанием прямого параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является ромб $ABCD$, сторона которого равна $4\sqrt{3}$, а угол BAD равен 60^0. Найдите расстояние от точки A до прямой C_1D_1, если известно, что боковое ребро данного параллелепипеда равно 8.



Решение. Искомое расстояние есть высота треугольника AC_1D_1, проведенная из вершины A. Ищем стороны данного треугольника. Ребро $C_1D_1 = 4\sqrt{3}$. Из прямоугольного треугольника ADD_1 находим $AD_1 = \sqrt{AD^2 + DD_1^2} = 4\sqrt{7}.$

Далее $\angle ADC = 180^0 - 60^0 = 120^0$. Из теоремы косинусов для треугольника ADC получаем, что $AC^2 = AD^2 + DC^2 - -2 \cdot AD \cdot DC \cos \angle ADC$, откуда $AC = 12.$ Из прямоугольного треугольника ACC_1 находим $AC_1 = \sqrt{AC^2 + CC_1^2} = 4\sqrt{13}.$

Из теоремы косинусов для треугольника AC_1D_1 получаем, что $D_1C_1^2 = AD_1^2 + AC_1^2 - 2 \cdot AD_1 \cdot AC_1 \cos \angle D_1AC_1$, откуд а $\cos \angle D_1AC_1 = \frac{17}{2\sqrt{13}\sqrt{7}}$. Тогда $\sin \angle D_1AC_1 = \frac{5\sqrt{3}}{2\sqrt{13}\sqrt{7}}$. Площадь треугольника равна $S = \frac{1}{2}AD_1 \cdot AC_1 \sin \angle D_1AC_1 = 20\sqrt{3}$. С другой стороны $S = \frac{1}{2}AH \cdot C_1D_1 = 2\sqrt{3} \cdot AH$. Следовательно, $AH = 10.$

Здесь мы воспользовались приемом сведения задачи по стереометрии из ЕГЭ к задаче по планиметрии. Как видите, в данном случае такой способ решения нельзя назвать наиболее рациональным. И все же он не лишен права на существование. Подробнее о решении планиметрических задач из ЕГЭ по математике читайте в статье

Ответ: 10.