Задача B8 — геометрический смысл производной

В задаче B8 дается график функции или производной, по которому требуется определить одну из следующих величин:

1. Значение производной в некоторой точке x_0,
2. Точки максимума или минимума (точки экстремума),
3. Интервалы возрастания и убывания функции (интервалы монотонности).

Функции и производные, представленные в этой задаче, всегда непрерывны, что значительно упрощает решение. Не смотря на то, что задача относится к разделу математического анализа, она вполне по силам даже самым слабым ученикам, поскольку никаких глубоких теоретических познаний здесь не требуется.

Для нахождения значения производной, точек экстремума и интервалов монотонности существуют простые и универсальные алгоритмы — все они будут рассмотрены ниже.

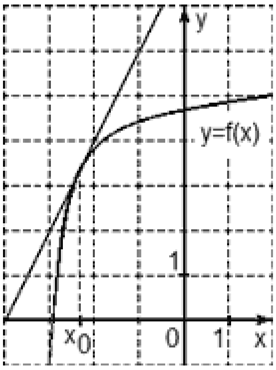
Вычисление значения производной. Метод двух точек

Если в задаче дан график функции $f(x)$, касательная к этому графику в некоторой точке x_0, и требуется найти значение производной в этой точке, применяется следующий алгоритм:

1. Найти на графике касательной две «адекватные» точки: их координаты должны быть целочисленными. Обозначим эти точки A (x_1; y_1) и B (x_2; y_2). Правильно выписывайте координаты — это ключевой момент решения, и любая ошибка здесь приводит к неправильному ответу.
2. Зная координаты, легко вычислить приращение аргумента $\Delta x = x_2 - x_1$ и приращение функции $\Delta y = y_2 - y_1$.
3. Наконец, находим значение производной $D = \Delta y/\Delta x$. Иными словами, надо разделить приращение функции на приращение аргумента — и это будет ответ.

Еще раз отметим: точки A и B надо искать именно на касательной, а не на графике функции $f(x)$, как это часто случается. Касательная обязательно будет содержать хотя бы две таких точки — иначе задача составлена некорректно.

***Задача*. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.**

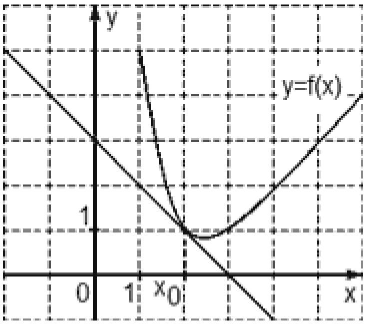


Решение. Рассмотрим точки A (−3; 2) и B (−1; 6) и найдем приращения:
Δx = x2 − x1 = −1 − (−3) = 2; Δy = y2 − y1 = 6 − 2 = 4.

Найдем значение производной: D = Δy/Δx = 4/2 = 2.

Ответ: 2

•***Задача*. На рисунке изображен график функции y = f(x) и касательная к нему в точке с абсциссой x0. Найдите значение производной функции f(x) в точке x0.**

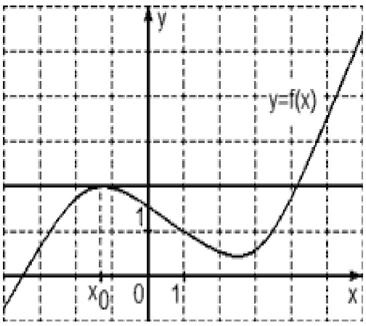


Решение. Рассмотрим точки A (0; 3) и B (3; 0), найдем приращения:
Δx = x2 − x1 = 3 − 0 = 3; Δy = y2 − y1 = 0 − 3 = −3.

Теперь находим значение производной: D = Δy/Δx = −3/3 = −1.

Ответ: −1

•***Задача*. На рисунке изображен график функции y = f(x) и касательная к нему в точке с абсциссой x0. Найдите значение производной функции f(x) в точке x0.**



Решение. Рассмотрим точки A (0; 2) и B (5; 2) и найдем приращения:
Δx = x2 − x1 = 5 − 0 = 5; Δy = y2 − y1 = 2 − 2 = 0.

Осталось найти значение производной: D = Δy/Δx = 0/5 = 0.

Ответ: 0

Из последнего примера можно сформулировать правило: если касательная параллельна оси OX, производная функции в точке касания равна нулю. В этом случае даже не надо ничего считать — достаточно взглянуть на график.

Вычисление точек максимума и минимума

Иногда вместо графика функции в задаче B8 дается график производной и требуется найти точку максимума или минимума функции. При таком раскладе метод двух точек бесполезен, но существует другой, еще более простой алгоритм. Для начала определимся с терминологией:

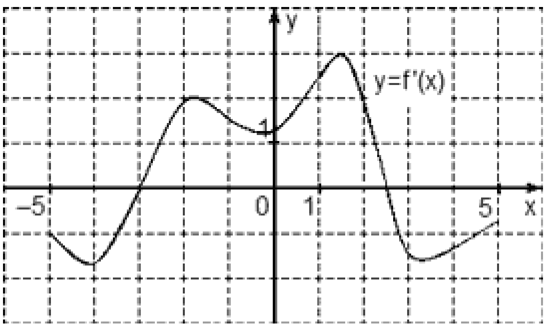
1. Точка x0 называется точкой максимума функции f(x), если в некоторой окрестности этой точки выполняется неравенство: f(x0) ≥ f(x).
2. Точка x0 называется точкой минимума функции f(x), если в некоторой окрестности этой точки выполняется неравенство: f(x0) ≤ f(x).

Для того чтобы найти точки максимума и минимума по графику производной, достаточно выполнить следующие шаги:

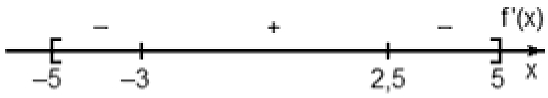
1. Перечертить график производной, убрав всю лишнюю информацию. Как показывает практика, лишние данные только мешают решению. Поэтому отмечаем на координатной оси нули производной — и все.
2. Выяснить знаки производной на промежутках между нулями. Если для некоторой точки x0 известно, что f'(x0) ≠ 0, то возможны лишь два варианта: f'(x0) ≥ 0 или f'(x0) ≤ 0. Знак производной легко определить по исходному чертежу: если график производной лежит выше оси OX, значит f'(x) ≥ 0. И наоборот, если график производной проходит под осью OX, то f'(x) ≤ 0.
3. Снова проверяем нули и знаки производной. Там, где знак меняется с минуса на плюс, находится точка минимума. И наоборот, если знак производной меняется с плюса на минус, это точка максимума. Отсчет всегда ведется слева направо.

Эта схема работает только для непрерывных функций — других в задаче B8 не встречается.

• ***Задача*. На рисунке изображен график производной функции f(x), определенной на отрезке [−5; 5]. Найдите точку минимума функции f(x) на этом отрезке.**



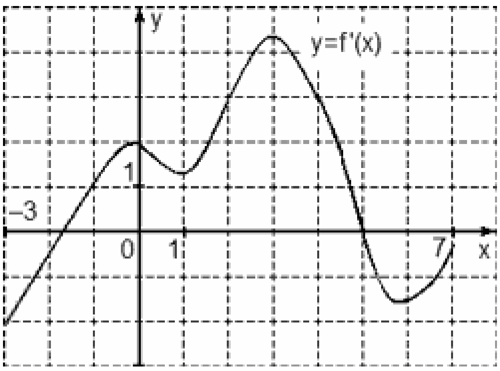
Решение. Избавимся от лишней информации — оставим только границы [−5; 5] и нули производной x = −3 и x = 2,5. Также отметим знаки:



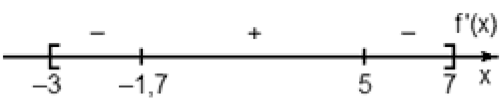
Очевидно, в точке x = −3 знак производной меняется с минуса на плюс. Это и есть точка минимума.

Ответ: −3

•***Задача*. На рисунке изображен график производной функции f(x), определенной на отрезке [−3; 7]. Найдите точку максимума функции f(x) на этом отрезке.**



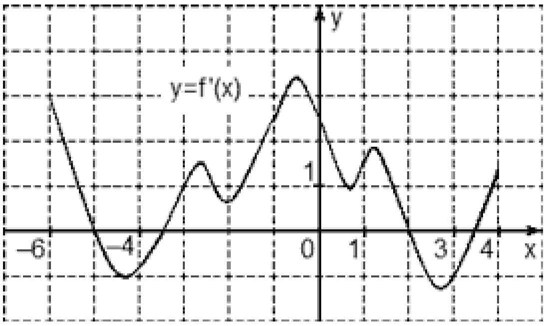
Решение. Перечертим график, оставив на координатной оси только границы [−3; 7] и нули производной x = −1,7 и x = 5. Отметим на полученном графике знаки производной. Имеем:



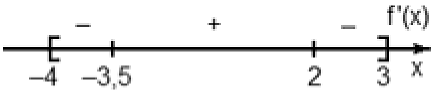
Очевидно, в точке x = 5 знак производной меняется с плюса на минус — это точка максимума.

Ответ: 5

•***Задача*. На рисунке изображен график производной функции f(x), определенной на отрезке [−6; 4]. Найдите количество точек максимума функции f(x), принадлежащих отрезку [−4; 3].**



Решение. Из условия задачи следует, что достаточно рассмотреть только часть графика, ограниченную отрезком [−4; 3]. Поэтому строим новый график, на котором отмечаем только границы [−4; 3] и нули производной внутри него. А именно, точки x = −3,5 и x = 2. Получаем:



На этом графике есть лишь одна точка максимума x = 2. Именно в ней знак производной меняется с плюса на минус.

Ответ: 1

Небольшое замечание по поводу точек с нецелочисленными координатами. Например, в последней задаче была рассмотрена точка x = −3,5, но с тем же успехом можно взять x = −3,4. Если задача составлена корректно, такие изменения не должны влиять на ответ, поскольку точки «без определенного места жительства» не принимают непосредственного участия в решении задачи. Разумеется, с целочисленными точками такой фокус не пройдет.

Нахождение интервалов возрастания и убывания функции

В такой задаче, подобно точкам максимума и минимума, предлагается по графику производной отыскать области, в которых сама функция возрастает или убывает.
Для начала определим, что такое возрастание и убывание:

1.Функция f(x) называется возрастающей на отрезке [a; b] если для любых двух точек x1 и x2 из этого отрезка верно утверждение: x1 ≤ x2 ⇒ f(x1) ≤ f(x2). Другими словами, чем больше значение аргумента, тем больше значение функции.
2.Функция f(x) называется убывающей на отрезке [a; b] если для любых двух точек x1 и x2 из этого отрезка верно утверждение: x1 ≤ x2 ⇒ f(x1) ≥ f(x2).
Т.е. большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции.

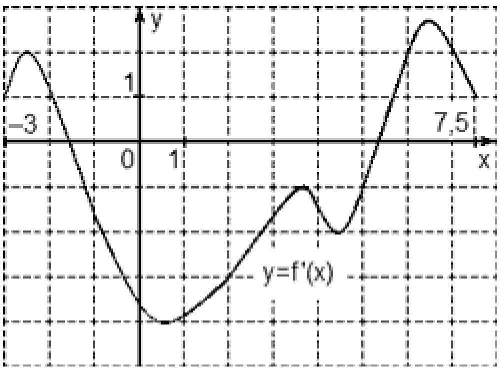
Сформулируем достаточные условия возрастания и убывания:

1.Для того чтобы непрерывная функция f(x) возрастала на отрезке [a; b], достаточно, чтобы ее производная внутри отрезка была положительна, т.е. f’(x) ≥ 0.
2.Для того чтобы непрерывная функция f(x) убывала на отрезке [a; b], достаточно, чтобы ее производная внутри отрезка была отрицательна, т.е. f’(x) ≤ 0.

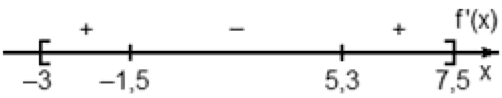
Примем эти утверждения без доказательств. Таким образом, получаем схему для нахождения интервалов возрастания и убывания, которая во многом похожа на алгоритм вычисления точек экстремума:

1. Убрать всю лишнюю информацию. На исходном графике производной нас интересуют в первую очередь нули функции, поэтому оставим только их.
2. Отметить знаки производной на интервалах между нулями. Там, где $f'(x) \geq 0$, функция возрастает, а где $f'(x) \leq 0$ — убывает. Если в задаче установлены ограничения на переменную x, дополнительно отмечаем их на новом графике.
3. Теперь, когда нам известно поведение функции и ограничения, остается вычислить требуемую в задаче величину.

• ***Задача*. На рисунке изображен график производной функции f(x), определенной на отрезке [−3; 7,5]. Найдите промежутки убывания функции f(x). В ответе укажите сумму целых чисел, входящих в эти промежутки.**



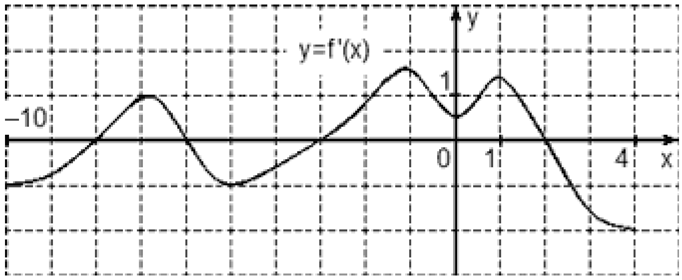
Решение. Как обычно, перечертим график и отметим границы [−3; 7,5], а также нули производной x = −1,5 и x = 5,3. Затем отметим знаки производной. Имеем:



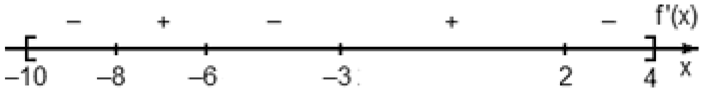
Поскольку на интервале (− 1,5) производная отрицательна, это и есть интервал убывания функции. Осталось просуммировать все целые числа, которые находятся внутри этого интервала:
$-1 + 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 14$.

Ответ: 14

• ***Задача*. На рисунке изображен график производной функции f(x), определенной на отрезке [−10; 4]. Найдите промежутки возрастания функции f(x). В ответе укажите длину наибольшего из них.**



Решение. Избавимся от лишней информации. Оставим только границы [−10; 4] и нули производной, которых в этот раз оказалось четыре: x = −8, x = −6, x = −3 и x = 2. Отметим знаки производной и получим следующую картинку:



Нас интересуют промежутки возрастания функции, т.е. такие, где f’(x) ≥ 0. На графике таких промежутков два: (−8; −6) и (−3; 2). Вычислим их длины:
l1 = − 6 − (−8) = 2;
l2 = 2 − (−3) = 5.

Поскольку требуется найти длину наибольшего из интервалов, в ответ записываем значение l2 = 5.

Ответ: 5