Задача B7: тригонометрия и планиметрия

Радианная и градусная мера угла

В школьном курсе математики есть два определения основных тригонометрических функций — синуса, косинуса, тангенса и котангенса:

1. Геометрический подход — основан на сторонах прямоугольного треугольника и их соотношениях. В этом случае все синусы и косинусы положительны, поскольку длина отрезка всегда задается положительным числом;
2. Алгебраический подход — работа ведется на тригонометрической окружности. Такой подход возникает на стыке 9—10 классов, и с этого момента синусы и косинусы вполне могут быть отрицательными. А «старые» геометрические определения становятся лишь частным случаем.

Для решения задачи B7 нужен именно алгебраический подход. Чуть позже мы убедимся, что такие задачи решаются элементарно — буквально с помощью одной формулы. Но для начала научимся быстро (буквально на лету) определять координатную четверть, в которой расположен искомый угол. В этом нам помогут следующие правила.

Переход от радианной меры к градусной

Вспомните: в 8—9 классах мы работали лишь с несколькими стандартными углами. А именно: 30°, 45° и 60°. В особо продвинутых случаях учителя рассказывали еще об углах 90° и 0°. Любые другие значения назывались «сложными», и возникновение таких углов, скорее всего, указывало на ошибку в решении.

С введением тригонометрической окружности все ограничения на углы отпадают. Здесь я не буду рассказывать, как устроена тригонометрическая окружность — все это подробно описано в любом учебнике по математике. Вместо этого предлагаю обсудить другой вопрос — более важный, но которому почему-то не уделяется достаточно внимания. Речь идет о переходе от радианной меры угла к градусной.

Исторически так сложилось (и небезосновательно), что углы на тригонометрической окружности измеряют в радианах. Например, полный оборот — 360° — обозначается как 2π радиан. А всеми любимый (или ненавидимый) угол 45° равен $\pi/4$ радиан.

У многих возникает вопрос: при чем здесь число π? Ведь $\pi \approx 3{,}14$.Так вот, чтобы избежать путаницы, запомните простое, но очень важное правило:

Во всех тригонометрических функциях — синусе, косинусе, тангенсе и котангенсе — можно без ущерба для здоровья заменять число πна 180°. Пишется это так: $\pi \to 180°$.

Обратите внимание: данное правило работает толькодля тригонометрических функций! Например, мы спокойно можем записать $\sin \pi = \sin 180°$. Но если мы хотим найти примерную длинуотрезка $l = 5\pi$, придется считать: $l = 5 \cdot \pi \approx 5 \cdot 3{,}14 = 15{,}7$.

Разумеется, существует и обратное правило — переход от градусной меры угла к радианной. Однако нас это сейчас не интересует, поскольку в задачах B7 такой переход не встречается.

Знаки тригонометрических функций

Синус угла α — это ордината (координата y) точки на тригонометрической окружности, которая возникает при повороте радиуса на угол α.

Косинус угла α — это абсцисса (координата x) точки на тригонометрической окружности, которая возникает при повороте радиуса на угол α.

Тангенс угла α — это отношение синуса к косинусу. Или, что то же самое, отношение координаты y к координате x.

$\sin \alpha = y$; $\cos \alpha = x$; $\mathrm{tg}\, \alpha = y : x$.

Основное тригонометрическое тождество

Теорема

Основное тригонометрическое тождество. Для любого угла α верно утверждение:
$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.
Эта формула связывает синус и косинус одного угла. Теперь, зная синус, мы легко найдем косинус — и наоборот. Достаточно извлечь квадратный корень:

$$\sin \alpha = \pm\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}; \quad \cos \alpha = \pm\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$$

Обратите внимание на знак «±» перед корнями. Дело в том, что из основного тригонометрического тождества непонятно, каким был исходный синус и косинус: положительным или отрицательным. Ведь возведение в квадрат — четная функция, которая «сжигает» все минусы (если они были).
Именно поэтому во всех задачах B7, которые встречаются в ЕГЭ по математике, обязательно есть дополнительные условия, которые помогают избавиться от неопределенности со знаками. Обычно это указание на координатную четверть, по которой можно определить знак.
Внимательный читатель наверняка спросит: «А как быть с тангенсом и котангенсом?» Напрямую вычислить эти функции из приведенных выше формул нельзя. Однако существуют важные следствия из основного тригонометрического тождества, которые уже содержат тангенсы и котангенсы. А именно:
Следствие
Для любого угла α можно переписать основное тригонометрическое тождество следующим образом:

$$\mathrm{tg}^2\, \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}; \quad \mathrm{ctg}^2\, \alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

Эти уравнения легко выводятся из основного тождества — достаточно разделить обе стороны на $\cos^2 \alpha$ (для получения тангенса) или на $\sin^2 \alpha$(для котангенса).
Рассмотрим все это на конкретных примерах. Ниже приведены настоящие задачи B7, которые взяты из пробных вариантов ЕГЭ по математике 2012.

Задача

Найдите sin α, если известно следующее:

$$\cos \alpha = -\frac{3\sqrt{11}}{10};\ \alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$$

Решение

Нам известен косинус, но неизвестен синус. Основное тригонометрическое тождество (в «чистом» виде) связывает как раз эти функции, поэтому будем работать с ним. Имеем:

$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \sin^2 \alpha + 99/100 = 1 \Rightarrow \sin^2 \alpha = 1/100 \Rightarrow \sin \alpha = \pm 1/10 = \pm 0{,}1$.

Для решения задачи осталось найти знак синуса. Поскольку угол $\alpha \in (\pi/2; \pi)$, то в градусной мере

это записывается так: $\alpha \in (90°; 180°)$.

Следовательно, угол α лежит во II координатной четверти — все синусы там положительны. Поэтому $\sin \alpha = 0{,}1$.

Ответ

0,1

Задача

Найдите cos α, если известно следующее:

$$\sin \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2};\ \alpha \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$$

Решение

Итак, нам известен синус, а надо найти косинус. Обе эти функции есть в основном тригонометрическом тождестве. Подставляем:

$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow 3/4 + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos^2 \alpha = 1/4 \Rightarrow \cos \alpha = \pm 1/2 = \pm 0{,}5$.

Осталось разобраться со знаком перед дробью. Что выбрать: плюс или минус? По условию, угол α принадлежит промежутку $(\pi\ 3\pi/2)$.Переведем углы из радианной меры в градусную —

получим:α ∈ (180°; 270°).

Очевидно, это III координатная четверть, где все косинусы отрицательны. Поэтому cos α = −0,5.
Ответ
−0,5

Задача
Найдите tg α, если известно следующее:

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{10}};\ \alpha \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$$

Решение
Тангенс и косинус связаны уравнением, следующим из основного тригонометрического тождества:

$$\mathrm{tg}^2\,\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow \mathrm{tg}^2\,\alpha = 10 - 1 = 9$$

Получаем: tg α = ±3. Знак тангенса определяем по углу α. Известно,что α ∈ (3π/2; 2π). Переведем

углы из радианной меры в градусную — получим α ∈ (270°; 360°).

Очевидно, это IV координатная четверть, где все тангенсы отрицательны. Поэтому tg α = −3.
Ответ
−3

Задача
Найдите cos α, если известно следующее:

$$\sin\alpha = -0{,}8;\ \alpha \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$$

Решение
Снова известен синус и неизвестен косинус. Запишем основное тригонометрическое тождество:
sin2 α + cos2 α = 1 ⇒ 0,64 + cos2 α = 1 ⇒ cos2 α = 0,36 ⇒ cos α = ±0,6.
Знак определяем по углу. Имеем: α ∈ (3π/2; 2π). Переведем углы из градусной меры в радианную:
α ∈ (270°; 360°) —это IV координатная четверть, косинусы там положительны. Следовательно,
cos α = 0,6.
Ответ
0,6

Задача

Найдите sin α, если известно следующее:

$$\operatorname{ctg} \alpha = 2\sqrt{6}; \ \alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$$

Решение

Запишем формулу, которая следует из основного тригонометрического тождества и напрямую связывает синус и котангенс:

$$\operatorname{ctg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \Rightarrow \frac{1}{\sin^2 \alpha} = 24 + 1 = 25$$

Отсюда получаем, что sin2 α = 1/25, т.е. sin α = ±1/5 = ±0,2. Известно, что угол α ∈ (0; π/2). В градусной мере это записывается так:α ∈ (0°; 90°) — I координатная четверть.

Итак, угол находится в I координатной четверти — все тригонометрические функции там положительны, поэтомуsin α = 0,2.

Ответ

0,2