Задача B3 — логарифмические, показательные и иррациональные уравнения

Все задачи B3, которые мне доводилось видеть, были сформулированы примерно одинаково: решить уравнение. При этом сами уравнения относятся к одному из трех видов:
1. Логарифмические;
2. Показательные;
3. Иррациональные.

Вообще говоря, полноценное руководство по каждому типу уравнений займет не один десяток страниц, выходя далеко за рамки ЕГЭ. Поэтому мы рассмотрим лишь самые простые случаи, требующие незатейливых рассуждений и выкладок. Этих знаний будет вполне достаточно, чтобы решить любую задачу B3.
В математике термин «решить уравнение» означает найти множество всех корней данного уравнения, либо доказать, что это множество пусто. Но в бланк ЕГЭ можно вписывать только числа — никаких множеств. Поэтому, если в задании B3 оказалось больше одного корня (или, наоборот, ни одного) — в решении была допущена ошибка.

Логарифмические уравнения

Определение
Логарифмическое уравнение — это любое уравнение, которое сводится к виду $\log_a f(x) = k$, где $a > 0$, $a \neq 1$ — основание логарифма, $f(x)$ — произвольная функция, k — некоторая постоянная.
Такое уравнение решается внесением постоянной k под знак логарифма: $k = \log_a a^k$. Основание нового логарифма равно основанию исходного. Получим уравнение $\log_a f(x) = \log_a a^k$, которое решается отбрасыванием логарифма.
Заметим, что по условию $a > 0$, поэтому $f(x) = a^k > 0$, т.е. исходный логарифм существует.
Задача
Решить уравнение: $\log_7 (8 - x) = 2$.
Решение
$\log_7 (8 - x) = 2 \Leftrightarrow \log_7 (8 - x) = \log_7 7^2 \Leftrightarrow 8 - x = 49 \Leftrightarrow x = -41$.
Ответ
-41
Задача
Решить уравнение: $\log_{0,5} (6 - x) = -2$.

Решение
$\log_{0,5} (6 - x) = -2 \Leftrightarrow \log_{0,5} (6 - x) = \log_{0,5} 0,5^{-2} \Leftrightarrow 6 - x = 4 \Leftrightarrow x = 2$.
Ответ
2
Но что делать, если исходное уравнение окажется сложнее, чем стандартное $\log_a f(x) = k$? Тогда сводим его к стандартному, собирая все логарифмы в одной стороне, а числа — в другой.
Если в исходном уравнении присутствует более одного логарифма, придется искать область допустимых значений (ОДЗ) каждой функции, стоящей под логарифмом. Иначе могут появиться лишние корни.
Задача
Решить уравнение: $\log_5 (x + 1) + \log_5 (x + 5) = 1$.
Решение
Поскольку в уравнении присутствуют два логарифма, найдем ОДЗ:
1. $x + 1 > 0 \Leftrightarrow x > -1$
2. $x + 5 > 0 \Leftrightarrow x > -5$

Получаем, что ОДЗ — это интервал $(-1, +\infty)$. Теперь решаем уравнение:
$\log_5 (x + 1) + \log_5 (x + 5) = 1 \Rightarrow \log_5 (x + 1)(x + 5) = 1 \Leftrightarrow \log_5 (x + 1)(x + 5) = \log_5 5^1 \Leftrightarrow (x + 1)(x + 5) = 5 \Leftrightarrow x^2 + 6x + 5 = 5 \Leftrightarrow x (x + 6) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0, x_2 = -6$.
Но $x_2 = -6$ не подходит по ОДЗ. Остается корень $x_1 = 0$.

Ответ
0

Показательные уравнения

Определение

Показательное уравнение — это любое уравнение, которое сводится к виду $a^{f(x)} = k$, где $a > 0$, $a \neq 1$ — основание степени, $f(x)$ —произвольная функция, k — некоторая постоянная.

Это определение почти дословно повторяет определение логарифмического уравнения.

Решаются показательные уравнения даже проще, чем логарифмические, ведь здесь не требуется, чтобы функция $f(x)$ была положительна.

Для решения сделаем замену $k = a^t$, где t — вообще говоря, логарифм($t = \log_a k$), но в ЕГЭ числа a и k будут подобраны так, что найти tбудет легко. В полученном уравнении $a^{f(x)} = a^t$ основания равны, а значит, равны и показатели, т.е. $f(x) = t$. Решение последнего уравнения, как правило, не вызывает проблем.

Задача

Решить уравнение: $7^{x-2} = 49$.

Решение

$7^{x-2} = 49 \Leftrightarrow 7^{x-2} = 7^2 \Leftrightarrow x - 2 = 2 \Leftrightarrow x = 4$.

Ответ

4

Задача

Решить уравнение: $6^{16-x} = 1/36$.

Решение

$6^{16-x} = 1/36 \Leftrightarrow 6^{16-x} = 6^{-2} \Leftrightarrow 16 - x = -2 \Leftrightarrow x = 18$.

Ответ

18

Немного о преобразовании показательных уравнений. Если исходное уравнение отличается от $a^{f(x)} = k$, применяем правила работы со степенями:

1. $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$,
2. $a^n / a^m = a^{n-m}$,
3. $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$.

Кроме того, надо знать правила замены корней и дробей на степени с рациональным показателем:

$$\sqrt{a^n} = a^{\frac{n}{2}}; \frac{1}{a^n} = a^{-n}$$

Такие уравнения встречаются в ЕГЭ крайне редко, но без них разбор задачи B3 был бы неполным.

Задача

Решить уравнение: $(5/7)^{x-2} \cdot (7/5)^{2x-1} = 125/343$

Решение

Заметим, что:

1. $(7/5)^{2x-1} = ((5/7)^{-1})^{2x-1} = (5/7)^{1-2x}$,
2. $125/343 = (5^3)/(7^3) = (5/7)^3$.

Имеем: $(5/7)^{x-2} \cdot (7/5)^{2x-1} = 125/343 \Leftrightarrow (5/7)^{x-2} \cdot (5/7)^{1-2x} = (5/7)^3 \Leftrightarrow (5/7)^{x-2+1-2x} = (5/7)^3 \Leftrightarrow (5/7)^{-x-1} = (5/7)^3 \Leftrightarrow -x - 1 = 3 \Leftrightarrow x = -4$.

Ответ

−4

Иррациональные уравнения

Под иррациональным понимается любое уравнение, содержащее знак корня. Из всего многообразия иррациональных уравнений мы рассмотрим лишь простейший случай, когда уравнение имеет вид:

$$\sqrt{f(x)} = a, \text{где } a \geq 0$$

Чтобы решить такое уравнение, возведем обе стороны в квадрат. Получим уравнение f(x) = a2.
При этом автоматически выполняется требование ОДЗ: f(x) ≥ 0, т.к. a2 ≥ 0. Остается решить несложное уравнение f(x) = a2.
Задача
Решить уравнение:

$$\sqrt{5x - 6} = 8$$

Решение
Возводим обе стороны в квадрат и получим: 5x − 6 = 82 ⇔5x − 6 = 64 ⇔ 5x = 70 ⇔ x = 14.
Ответ
14

Задача
Решить уравнение:

$$\sqrt{-\frac{x + 24}{5x}} = 1$$

Решение
Сначала, как и в прошлый раз, возводим обе стороны в квадрат. А затем внесем знак «минус» в числитель. Имеем:

$$-\frac{x + 24}{5x} = 1^2 \Leftrightarrow -x - 24 = 5x \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow x = -4$$

Заметим, что при x = −4 под корнем будет положительное число,т.е. требование ОДЗ выполнено.

Ответ
−4