Задача B14 — исследование функции с помощью производной

В задаче B14 предлагается исследовать функцию с помощью производной. Это стандартная задача по математическому анализу, и ее сложность сильно меняется в зависимости от рассматриваемой функции: некоторые решаются буквально устно, другие требуют серьезных размышлений.

Все задачи B14 делятся на два класса, каждому из них будет посвящен отдельный цикл уроков и тестов:

1. Найти точку максимума или минимума — значение *переменной*, при которой функция достигает наибольшего (наименьшего) значения. Такие точки еще называются точками экстремума;
2. Найти наибольшее или наименьшее значение *самой функции*на отрезке. Если отрезок не указан, работаем на всей числовой прямой. Другое название таких значений — глобальные экстремумы.

Большинство задач B14 решаются через производную. Но есть такие, которые считаются «напролом», без всяких производных — достаточно внимательно читать условие. Это замечание настолько важно, что ему будет посвящен отдельный урок.

Как решать задачи B14 без производных

Иногда в задачах B14 попадаются «плохие» функции, для которых сложно найти производную. Раньше такое было лишь на пробниках, но сейчас эти задачи настолько распространены, что уже не могут быть игнорированы при подготовке к настоящему ЕГЭ.

В этом случае работают другие приемы, один из которых —*монотонность*.

Определение

Функция $f(x)$ называется монотонно возрастающей на отрезке $[a; b]$,если для любых точек $x1$ и $x2$ этого отрезка выполняется следующее:

$x1 < x2 \Rightarrow f(x1) < f(x2)$.

Функция $f(x)$ называется монотонно убывающей на отрезке $[a; b]$, если для любых точек $x1$ и $x2$ этого отрезка выполняется следующее:
$x1 < x2 \Rightarrow f(x1) > f(x2)$.

Другими словами, для возрастающей функции чем больше x,тем больше $f(x)$. Для убывающей функции все наоборот: чем больше x,тем *меньше* $f(x)$.

Примеры

Логарифм монотонно возрастает, если основание $a > 1$, и монотонно убывает, если $0 < a < 1$. Не забывайте про область допустимых значений логарифма: $x > 0$.
$f(x) = \log_a x$ $(a > 0;\ a \neq 1;\ x > 0)$

Арифметический квадратный (и не только квадратный) корень монотонно возрастает на всей области определения:

$$f(x) = \sqrt{x};\ \ f(x) = \sqrt[n]{x}\ \ (x \geq 0)$$

Показательная функция ведет себя аналогично логарифму: растетпри $a > 1$ и убывает при $0 < a < 1$. Но в отличие от логарифма, показательная функция определена для всех чисел, а не толькодля $x > 0$:

$f(x) = a\ x$ (a > 0)

Наконец, степени с отрицательным показателем. Можно записывать их как дробь. Имеют точку разрыва, в которой монотонность нарушается.

$$f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1};\ \ f(x) = \frac{1}{x^n} = x^{-n}$$

Все эти функции никогда не встречаются в чистом виде. В них добавляют многочлены, дроби и прочий бред, из-за которогостановится тяжело считать производную. Что при этом происходит — сейчас разберем.

Координаты вершины параболы

Чаще всего аргумент функции заменяется на *квадратный трехчлен*вида $y = ax2 + bx + c$. Его график — стандартная парабола, в которой нас интересуют:

1. Ветви параболы — могут уходить вверх (при $a > 0$) или вниз($a < 0$). Задают направление, в котором функция может принимать бесконечные значения;
2. Вершина параболы — точка экстремума квадратичной функции, в которой эта функция принимает свое наименьшее (для $a > 0$)или наибольшее ($a < 0$) значение.

Наибольший интерес представляет именно *вершина параболы*, абсцисса которой рассчитывается по формуле:

$$x_0 = -\frac{b}{2a}$$

Итак, мы нашли точку экстремума квадратичной функции. Но если исходная функция монотонна, для нее точка $x0$ тоже будет точкой экстремума. Таким образом, сформулируем ключевое правило:

Точки экстремума квадратного трехчлена и сложной функции, в которую он входит, совпадают. Поэтому можно искать $x0$для квадратного трехчлена, а на функцию — забить.

Из приведенных рассуждений остается непонятным, какую именно точку мы получаем: максимума или минимума. Однако задачи специально составляются так, что это не имеет значения. Судите сами:

1. Отрезок $[a; b]$ в условии задачи отсутствует. Следовательно, вычислять $f(a)$ и $f(b)$ не требуется. Остается рассмотреть лишь точки экстремума;
2. Но таких точек всего одна — это вершина параболы $x0$,координаты которой вычисляются буквально устно и без всяких производных.

Таким образом, решение задачи резко упрощается и сводится всего к двум шагам:

1.Выписать уравнение параболы $y = ax2 + bx + c$ и найти ее вершину по формуле: $x0 = -b/2a$;

2.Найти значение исходной функции в этой точке: $f(x0)$. Если никаких дополнительных условий нет, это и будет ответом.

На первый взгляд, этот алгоритм и его обоснование могут показаться сложными. Я намеренно не выкладываю «голую» схему решения, поскольку бездумное применение таких правил чревато ошибками.

Рассмотрим настоящие задачи из пробного ЕГЭ по математике — именно там данный прием встречается чаще всего. Заодно убедимся, что таким образом многие задачи B14 становятся почти устными.

Задача [Пробный ЕГЭ от 7 декабря 2011, 6 вариант]

Найдите наименьшее значение функции:

$$y = \sqrt{x^2 + 6x + 13}$$

Решение

Под корнем стоит квадратичная функция $y = x2 + 6x + 13$. График этой функции − парабола ветвями вверх, поскольку коэффициент$a = 1 > 0$.

Вершина параболы:
$x0 = -b/(2a) = -6/(2 \cdot 1) = -6/2 = -3$

Поскольку ветви параболы направлены вверх, в точке $x0 = -3$ функция$y = x2 + 6x + 13$ принимает наименьшее значение.

Корень монотонно возрастает, значит $x0$ — точка минимума всей функции. Имеем:

$$y_{\min} = y(-3) = \sqrt{(-3)^2 + 6 \cdot (-3) + 13} = \cdots = 2$$

Ответ 2

Задача [Пробный ЕГЭ от 7 декабря 2011, 7 вариант]

Найдите наименьшее значение функции:

$y = \log 2\ (x2 + 2x + 9)$

Решение

Под логарифмом снова квадратичная функция: $y = x2 + 2x + 9$.График — парабола ветвями вверх, т.к. $a = 1 > 0$.

Вершина параболы:
$x0 = -b/(2a) = -2/(2 \cdot 1) = -2/2 = -1$

Итак, в точке $x0 = -1$ квадратичная функция принимает наименьшее значение. Но функция $y = \log 2\ x$ — монотонная, поэтому:

$y\min = y(-1) = \log 2\ ((-1)2 + 2 \cdot (-1) + 9) = ... = \log 2\ 8 = 3$

Ответ 3

Следствия из области определения функции

Иногда для решения задачи B14 недостаточно просто найти вершину параболы. Искомое значение может лежать *на конце отрезка*, а вовсе не в точке экстремума. Если в задаче вообще не указан отрезок, смотрим на *область допустимых значений* исходной функции. А именно:

1. Аргумент логарифма должен быть положительным:
$y = \log a\, f(x) \Rightarrow f(x) > 0$
2. Арифметический квадратный корень существует только из *неотрицательных* чисел:
$y = \sqrt{f(x)} \Rightarrow f(x) \geq 0$
3. Знаменатель дроби не должен равняться нулю:
$y = \frac{1}{\left(f(x)\right)^n} \Rightarrow f(x) \neq 0$

Обратите внимание еще раз: ноль вполне может быть под корнем, но в логарифме или знаменателе дроби — никогда. Посмотрим, как это работает на конкретных примерах:

Задача [Пробный ЕГЭ от 7 декабря 2011, 8 вариант]

Найдите наибольшее значение функции:

$$y = \sqrt{3 - 2x - x^2}$$

Решение

Под корнем снова квадратичная функция: $y = 3 - 2x - x2$. Ее график — парабола, но ветви вниз, поскольку $a = -1 < 0$. Значит, парабола уходит на минус бесконечность, что недопустимо, поскольку арифметический квадратный корень из отрицательного числа не существует.

Выписываем область допустимых значений (ОДЗ):
$3 - 2x - x2 \geq 0 \Rightarrow x2 + 2x - 3 \leq 0 \Rightarrow (x + 3)(x - 1) \leq 0 \Rightarrow x \in [-3; 1]$

Теперь найдем вершину параболы:
$x0 = -b/(2a) = -(-2)/(2 \cdot (-1)) = 2/(-2) = -1$

Точка $x0 = -1$ принадлежит отрезку ОДЗ — и это хорошо. Теперь считаем значение функции в точке $x0$, а также на концах ОДЗ:

$$y(-1) = \sqrt{3 - 2 \cdot (-1) - (-1)^2} = \cdots = 2$$

$y(-3) = y(1) = 0$

Итак, получили числа 2 и 0. Нас просят найти наибольшее — это число 2.

Ответ 2

Специфика работы с логарифмами в задаче B14

Вообще говоря, для решения задачи B14 с логарифмом надо знать две формулы:

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}; \quad (\ln(kx+b))' = \frac{k}{kx+b}$$

Первая формула — классическая производная натурального логарифма, вторая — производная сложной функции. Обратите внимание: в числителе стоит число k, это не опечатка.

Добавьте к этим формулам стандартные правила вычисления производных — и задача B14 решена:
$(f \pm g)' = f' \pm g'$;
$(c \cdot f)' = c \cdot f'$, $c \in$ R.

В настоящих задачах логарифмы никогда не встречаются сами по себе. Поэтому обязательно приводите всю производную к общему знаменателю. Почему это важно, узнаете из примеров.

Задача

Найдите наименьшее значение функции на отрезке [0,5; 4]:

$y = 2x2 - 4 \ln x + 5$

Решение

Находим производную:

$$y' = (2x^2 - 4\ln x + 5)' = 4x - \frac{4}{x} = \frac{4(x^2-1)}{x}$$

Выясняем, когда производная равна к нулю. Дробь равна нулю, когда ее числитель равен нулю. Имеем:
$4(x2 - 1) = 0$;
$x2 = 1$;
$x = \pm 1$.

Корень $x = -1$ не принадлежит отрезку [0,5; 4], поэтому нас интересует только $x =$ 1. Кроме того, рассмотрим концы отрезка — числа 0,5 и 4.Итого три числа: 0,5; 1; 4. Поскольку требуется найти наименьшее значение функции, подставляем эти числа в исходную функцию:
$y\,(0,5) = 2 \cdot 0,52 - 4 \ln 0,5 + 5 = 0,5 - 4 \ln 0,5 + 5 = 5,5 - 4 \ln 0,5$;
$y\,(1) = 2 \cdot 12 - 4 \ln 1 + 5 = 2 - 0 + 5 = 7$;
$y\,(4) = 2 \cdot 42 - 4 \ln 4 + 5 = 32 - 4 \ln 4 + 5 = 37 - 4 \ln 4$.

В общем, выбирать особо не из чего. Ответ: 7. Потому что числа5,5 − 4ln 0,5 и 37 − 4ln 4 иррациональны, их нельзя записать в виде конечной десятичной дроби.

Ответ 7

Задача

Найдите точку минимума функции:

$y = 2x - 5 \ln (x - 7) + 3$

Решение

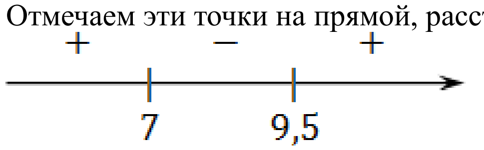
Снова считаем производную:

$$y' = (2x - 5\ln(x-7) + 3)' = 2 - \frac{5}{x-7} = \frac{2x-19}{x-7}$$

Под логарифмом стоит линейная функция $y = x - 7$. Коэффициент при переменной x равен $k = 1$, поэтому в числителе никаких дополнительных множителей не возникнет — только множитель 5, который стоит перед логарифмом.

Поскольку требуется найти точку минимума, считаем нули числителя и знаменателя:
$2x - 19 \Rightarrow x = 19 : 2 = 9{,}5$;
$x - 7 = 0 \Rightarrow x = 7$.

Отмечаем эти точки на прямой, расставляем знаки производной между точками:



Итак, в точке $x = 9{,}5$ производная меняет знак с минуса на плюс, если считать слева — направо, в направлении стрелки. Это и есть точка минимума.

Ответ 9,5

Вынесение степени за знак логарифма

Еще одна полезная фишка, которая избавит вас от сложных производных:
$\ln (f(x))k = k \cdot \ln f(x)$

Обратите внимание: в первом случае внутри логарифма стоит степень, для которой потребуется производная сложной функции. Во втором случае все намного проще, поскольку чаще всего $f(x)$ — это обычная линейная функция.

Этот прием часто встречается в задачах на вычисление максимального и минимального значения. В задачах на точки экстремума его почти не применяют

Задача

Найдите наименьшее значение функции на отрезке [−4; 1]:

$y = 5x - \ln (x + 5)5$

Решение

Итак, область допустимых значений логарифма — аргумент должен быть больше нуля. Имеем:

$(x + 5)5 > 0$;

$x + 5 > 0$;
$x > -5$;
$x \in (-5; +\infty)$.

Теперь решаем задачу. Сначала немного преобразуем исходное выражение:
$y = 5x - 5 \ln (x + 5)$

Это и есть вынесение степени за знак логарифма. Считаем производную:

$$y' = (5x - 5\ln(x+5))' = 5 - \frac{5}{x+5} = \cdots = \frac{5x+20}{x+5}$$

Дальше все стандартно. Нас интересует значение функции, поэтому приравниваем числитель к нулю:
$5x + 20 = 0$;
$x = -4$.

Полученное число $x = -4 \in [-4; 1]$ совпадает с концом отрезка, поэтому кандидатов на наименьшее значение всего два: -4 и 1.Оба числа подходят по ОДЗ. Поскольку требуется найти наименьшее значение, подставляем эти числа в исходную функцию:
$y(-4) = 5 \cdot (-4) - 5 \cdot \ln(-4 + 5) = -20 - 5 \cdot \ln 1 = -20$;
$y(1) = 5 \cdot 1 - 5 \cdot \ln(1 + 5) = 5 - 5 \ln 6$.

Второе число — точно не ответ, поскольку его нельзя представить в виде десятичного числа. Значит, наименьшее значение функции равно -20.
Ответ -20

Общая схема решения задач В14

Все задачи В14, которые встречаются в ЕГЭ по математике, делятся на два типа:

1. Задачи на поиск *максимального или минимального значения*функции на отрезке. Иногда отрезок не задан — в этом случае работаем на всей числовой прямой;
2. Задачи *на точку максимума/минимума*. Решаются чуть проще, зато функции здесь намного разнообразнее.

У каждого из них свои алгоритмы решения, которые будут рассмотрены ниже. Но в любом случае, чтобы решить задачу В14, учитесь считать производную — см. «Производная». Без производных здесь делать нечего.

Задачи на максимальное/минимальное значение
Если в задаче В14 требуется найти *максимальное или минимальное значение* функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$, выполняем следующие действия:

1. Найти производную функции: $f'(x)$;
2. Решить уравнение $f'(x) = 0$. Если корней нет, пропускаем третий шаг и переходим сразу к четвертому;

3.Из полученного набора корней вычеркнуть все, что лежит за пределами отрезка $[a; b]$. Оставшиеся числа обозначим$x1, x2, ..., xn$ — их, как правило, будет немного;
4.Подставим концы отрезка $[a; b]$ и точки $x1, x2, ..., xn$ в исходную функцию. Получим набор чисел $f(a), f(b), f(x1), f(x2), ..., f(xn)$,из которого выбираем наибольше или наименьшее значение — это и будет ответ.

Небольшое пояснение по поводу вычеркивания корней, когда они совпадают с концами отрезка. Такое вполне может встретиться на настоящем экзамене. Эти точки можно вычеркнуть, поскольку на четвертом шаге концы отрезка все равно подставляются в функцию — даже если уравнение $f'(x) = 0$ не имело решений.

Также следует внимательно читать условие задачи. Когда требуется найти *значение функции* (максимальное или минимальное), концы отрезка и точки $x1, x2, ..., xn$ подставляются именно *в функцию*,а не в ее производную.

Задача

Найдите наибольшее значение функции на отрезке $[-5; 0]$:

$y = x3 + 3x2 - 9x - 7$

Решение

Для начала найдем производную:

$y' = (x3 + 3x2 - 9x - 7)' = 3x2 + 6x - 9$

Затем приравняем ее к нулю:
$y' = 0;$
$3x2 + 6x - 9 = 0;$
...
$x1 = -3; x2 = 1.$

Вычеркиваем корень $x = 1$, поскольку он не принадлежит отрезку$[-5; 0]$. Осталось вычислить значение функции на концах отрезка и в точке $x = -3$. Имеем:
$y(-5) = (-5)3 + 4 \cdot (-5)2 - 9 \cdot (-5) - 7 = -12;$
$y(-3) = (-3)3 + 4 \cdot (-3)2 - 9 \cdot (-3) - 7 = 20;$
$y(0) = 03 + 4 \cdot 02 - 9 \cdot 0 - 7 = -7.$

Очевидно, что наибольшее значение равно 20 — оно достигается в точке $x = -3$.

Ответ 20

Задачи на точки максимума/минимума

Теперь рассмотрим случай, когда требуется найти *точку максимума или минимума* функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$. Если отрезок не задан, функция рассматривается на своей области определения. В любом случае, схема решения такова:

1.Найти производную функции: $f'(x)$;

2.Решить уравнение $f'(x) = 0$. Если производная — дробно-рациональная функция, дополнительно выясняем, когда ее знаменатель равен нулю. Полученные корни обозначим $x1, x2, ..., xn$;

3.Отметить $x1, x2, ..., xn$ на координатной прямой и расставить знаки, которые принимает производная между этими числами. Если задан отрезок $[a; b]$, отмечаем его и вычеркиваем все, что лежит за его пределами;

4.Среди оставшихся точек ищем ту, где знак производной меняется с минуса на плюс (это точка минимума) или с плюса на минус (точка минимума). Такая точка должна быть только одна — это и будет ответ.

В целом, задачи на точки максимума/минимума считаются даже *проще*, чем задачи на поиск наименьшего/наибольшего значения. Это происходит хотя бы из-за того, что здесь не надо считать значение функции в конкретных точках. Статистика свидетельствует, что именно на этом шаге ученики допускают *больше всего ошибок*.

Вдумчивый читатель наверняка заметит, что для некоторых функций этот алгоритм *не работает*. Действительно, существует целый класс функций, для которых нахождение точек экстремума требует более сложных выкладок. Однако такие функции в ЕГЭ по математике не встречаются.

Внимательно отнеситесь к расстановке знаков между точками $x1, x2, ..., xn$. Помните: при переходе через корень четной кратности *знак производной не меняется*. Когда ищутся точки экстремума, знаки читают слева направо, т.е. по направлению числовой оси.

Задача

Найдите точку максимума функции на отрезке $[-10; -1]$:

$$y = \frac{x^2 - 8x + 25}{x}$$

Решение

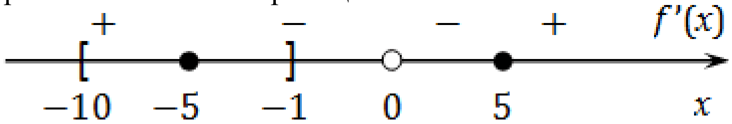
Найдем производную:

$$y' = \left(\frac{x^2 - 8x + 25}{x}\right)' = \dots = \frac{x^2 - 25}{x^2}$$

Поскольку это дробно-рациональная функция, приравниваем к нулю числитель:
$y' = 0$;
$x2 - 25 = 0$;
...
$x1 = 5; x2 = -5$.

Получили два корня. Теперь приравниваем к нулю знаменатель:
$x2 = 0$;
$x = 0$.

Получили $x = 0$ — корень второй кратности. При переходе через него знак производной не меняется. Осталось отметить точки $x = -5$; $x = 0$;$x = 5$ на координатной прямой, а затем расставить знаки и границы. Имеем:



Очевидно, что внутри отрезка останется лишь одна точка $x = -5$,в которой знак производной меняется с плюса на минус. Это и есть точка максимума.

Ответ -5

Еще раз поясню, чем отличаются точка экстремума от самого экстремума. Точка экстремума — это *значение переменной*, при которой

функция принимает наибольшее или наименьшее значение.Экстремум — это *значение самой функции*, максимальное или минимальное в некоторой окрестности.

Показательные функции в задаче B14

По определению, показательная функция — это выражение вида$y = ax$, где $a > 0$. Но в задаче B14 встречаются только функции вида$y = ex$. В крайнем случае, $y = ekx + b$. Причина в том, что производные этих функций считаются очень легко:

$(ex)' = ex$;
$(ekx + b)' = k \cdot ekx + b$.

Как видите, если в показателе стоит просто переменная x, ничего не меняется. А если там будет линейное выражение вида $kx + b$,то спереди добавляется множитель k. Эта формула — частный случай производной сложной функции.

Показатель должен быть равен нулю. Потому что $e0 = 1$ — нормальное число, его можно записать в ответ. В отличие от чисел $e1$, $e2$, которые вообще не представимы в виде десятичной дроби.

Задача

Найдите наименьшее значение функции на отрезке [−1; 5]:

$y = (x2 - 5x + 5)ex - 3$

Решение

Сначала находим производную и раскладываем ее на множители:

$y' = ((x2 - 5x + 5)ex - 3)' = ... = (x2 - 3x)ex - 3 = x(x - 3)ex - 3$

Затем приравниваем полученное выражение к нулю и находим корни:
$x(x - 3)ex - 3 = 0$;
$x1 = 0$; $x2 = 3$.

Оба корня принадлежат отрезку [−1; 5]. Итого получаем четыре точки: два корня и два конца

отрезка. Осталось вычислить *значение функции*в этих точках:
$y(-1) = ((-1)2 - 5 \cdot (-1) + 5)e-1 - 3 = ... = 11e-4$;
$y(0) = (02 - 5 \cdot 0 + 5)e0 - 3 = ... = 5e-3$;
$y(3) = (32 - 5 \cdot 3 + 5)e3 - 3 = ... = -1$;
$y(5) = (52 - 5 \cdot 5 + 5)e5 - 3 = ... = 5e2$.

Заметим, что из этих четырех чисел в бланк можно записать только$y = -1$. Кроме того, это единственное отрицательное число. Следовательно, это число и будет наименьшим.

Ответ -1

Задача

Найдите наибольшее значение функции на отрезке [0; 6]:

$y = (2x - 7)e8 - 2 \cdot x$

Решение

Как и в прошлый раз, вычисляем производную функции и раскладываем ее на множители:

$y' = (y = (2x - 7)e8 - 2 \cdot \mathrm{x})' = ... = (16 - 4x)e8 - 2 \cdot x = 4(4 - x)e8 - 2 \cdot x$

Приравниваем производную к нулю и находим корни:
$y' = 0$;
$4(4 - x)e8 - 2 \cdot x = 0$;
$x = 4$.

Корень $x = 4$ принадлежит отрезку [0; 6]. Мы ищем наибольшее значение, поэтому подставляем этот корень, а также концы отрезка в исходную функцию. Имеем:
$\mathrm{y}(0) = (2 \cdot 0 - 7)e8 - 2 \cdot 0 = ... = -7e8$;
$y(4) = (2 \cdot 4 - 7)e8 - 2 \cdot 4 = ... = 1$;
$y(6) = (2 \cdot 6 - 7)e8 - 2 \cdot 6 = ... = 5e-4$.

Итак, ответом может быть только число $y = 1$.

Задачи на вычисление точек максимума/минимума

В задачах на точки максимума/минимума нельзя применять приведенное выше правило, поэтому считаем все по стандартной схеме.

Задача

Найдите точку минимума функции:

$y = (x - 12)ex - 11$

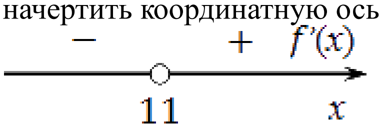
Решение

В первую очередь считаем производную:

$y' = (y = (x - 12)ex - 11)' =$
$= (x - 12)' \cdot ex - 11 + (x - 12) \cdot (ex - 11)' =$
$= 1 \cdot ex - 11 + (x - 12)ex - 11 =$
$= (1 + x - 12)ex - 11 =$
$= (x - 11)ex - 11$

Приравниваем производную к нулю:
$y' = 0;$
$(x - 11)ex - 11 = 0;$
$x - 11 = 0;$
$x = 11.$

Множитель $ex - 11$ никогда не равен нулю, поэтому мы избавились от него. Осталось начертить координатную ось и расставить знаки производной:



Итак, в точке $x = 11$ знак производной меняется с минуса на плюс. Считаем всегда в направлении оси — слева направо. Значит, $x = 11$ —это точка минимума.

Ответ 11

Задача

Найдите точку максимума функции:

$y = (2x2 - 34x + 34)e6 - x$

Решение

Снова считаем производную:

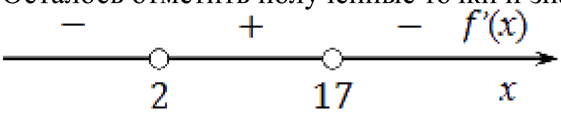
$y' = ((2x2 - 34x + 34)e6 - x)' =$
$= (2x2 - 34x + 34)' \cdot e6 - x + (2x2 - 34x + 34) \cdot (e6 - x)' =$
$= (4x - 34)e6 - x + (2x2 - 34x + 34) \cdot (-1) \cdot e6 - x$

Напомню, что производная сложной показательной функции считается по формуле:
$(ekx + b)' = k \cdot ekx + b;$
$(e6 - x)' = (-1) \cdot e6 - x.$

Производная получилась довольно навороченная. Разложим ее на множители, для этого вынесем $e6 - x$ за скобку. Имеем:
$(4x - 34)e6 - x + (2x2 - 34x + 34) \cdot (-1) \cdot e6 - x =$
$= e6 - x \cdot (4x - 34 - 2x2 + 34x - 34) =$
$= e6 - x \cdot (-2x2 + 38x - 68)$

Приравниваем полученное выражение к нулю:
$e6 - x \cdot (-2x2 + 38x - 68) = 0;$
$-2x2 + 38x - 68 = 0;$
$x2 - 19x + 34 = 0;$
...
$x1 = 17; x2 = 2.$

Множитель $e6 - x$ снова можно безболезненно убрать, поскольку он никогда не равен нулю. Осталось отметить полученные точки и знаки производной на координатной прямой:



Обратите внимание: на рисунке отмечены знаки производной функции: $y = e6 - x \cdot (-2x2 + 38x - 68)$ — а вовсе не многочлена$x2 - 19x + 34$, как думают некоторые ученики. В скобках стоит квадратичная функция, ее график — парабола ветвями вниз, поскольку $a = -2 < 0$.

В точке $x = 17$ знак производной меняется с плюса на минус. Значит, это точка максимума, что и требовалось найти.

Ответ 17

Тригонометрические функции

Основная сложность тригонометрических функций состоит в том, что при решении уравнений возникает бесконечное множество корней. Например, уравнение $\sin x = 0$ имеет корни $x = \pi n$, $n \in Z$. Ну и как отмечать их на координатной прямой, если таких чисел бесконечно много?

Ответ прост: надо подставлять конкретные значения n. Ведь в задачах B14 с тригонометрическими функциями всегда есть ограничение — отрезок $[a; b]$. Поэтому для начала берем $n = 0$, а затемувеличиваем n до тех пор, пока соответствующий корень не «вылезет» за пределы отрезка $[a; b]$. Аналогично, уменьшая n, очень скоро получим корень, который меньше нижней границы.

Несложно показать, что никаких корней, кроме полученных в рассмотренном процессе, на отрезке $[a; b]$ не существует. Рассмотрим теперь этот процесс на конкретных примерах.

Задача

Основная сложность тригонометрических функций состоит в том, что при решении уравнений возникает бесконечное множество корней. Например, уравнение $\sin x = 0$ имеет корни $x = \pi n$, $n \in Z$. Ну и как отмечать их на координатной прямой, если таких чисел бесконечно много?

Ответ прост: надо подставлять конкретные значения n. Ведь в задачах B14 с тригонометрическими функциями всегда есть ограничение — отрезок $[a; b]$. Поэтому для начала берем $n = 0$, а затемувеличиваем n до тех пор, пока соответствующий корень не «вылезет» за пределы отрезка $[a; b]$. Аналогично, уменьшая n, очень скоро получим корень, который меньше нижней границы.

Несложно показать, что никаких корней, кроме полученных в рассмотренном процессе, на отрезке $[a; b]$ не существует. Рассмотрим теперь этот процесс на конкретных примерах.

Задача

Найдите точку максимума функции, принадлежащуюотрезку $[-\pi/3; \pi/3]$:

$y = \sin x - 5x \sin x - 5\cos x + 1$

Решение

Вычисляем производную:

$y' = (\sin x - 5x \sin x - 5\cos x + 1)' = ... = \cos x - 5x \cos x =(1 - 5x) \cos x$

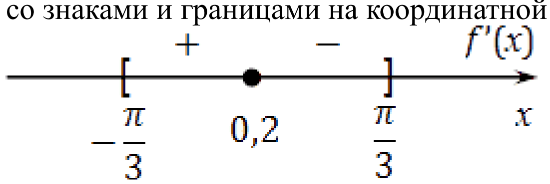
Затем решаем уравнение:
$y' = 0$;
$(1 - 5x) \cos x = 0$;
...
$x1 = 0{,}2$;
$x2 = \pi/2 + \pi n,\ n \in Z.$

С корнем $x = 0{,}2$ все понятно, а вот формула $x = \pi/2 + \pi n$ требует дополнительной обработки. Будем подставлять разные значения n,начиная с $n = 0$.
$n = 0 \Rightarrow x = \pi/2$

Но $\pi/2 > \pi/3$, поэтому корень $x = \pi/2$ не входит в исходный отрезок. Кроме того, чем больше n, тем больше x, поэтому нет смысла рассматривать $n > 0$.
$n = -1 \Rightarrow x = - \pi/2$

Но $-\pi/2 < -\pi/3$ — этот корень тоже придется отбросить. А вместе с ним — и все корни для $n < -1$.

Получается, что на отрезке $[-\pi/3; \pi/3]$ лежит только корень $x = 0{,}2$.Отметим его вместе со знаками и границами на координатной прямой:



Чтобы удостовериться, что справа от $x = 0{,}2$ производная действительно отрицательная, достаточно подставить в производную значение $x = \pi/4$. Мы же просто отметим, что в точке $x = 0{,}2$производная меняет знак с плюса на минус, а следовательно, это точка максимума.

Ответ 0,2

Задача

Найдите наибольшее значение функции на отрезке $[-\pi/4; \pi/4]$:

$y = 4 \text{ tg } x - 4x + \pi - 5$

Решение

Вычисляем производную:

$y' = (4\text{tg } x - 4x + \pi - 5)' = 4/\cos 2x - 4.$

Затем решаем уравнение:

$y' = 0 \Rightarrow 4/\cos 2x - 4 = 0 \Rightarrow ... \Rightarrow x = \pi n,\ n \in Z.$

Снова выделим из этой формулы корни, подставляя конкретные n,начиная с $n = 0$:
$n = 0 \Rightarrow x = 0$. Этот корень нам подходит.
$n = 1 \Rightarrow x = \pi$. Но $\pi > \pi/4$, поэтому корень $x = \pi$ и значения $n > 1$ надо вычеркнуть.
$n = -1 \Rightarrow x = -\pi$. Но $-\pi < -\pi/4$, поэтому $x = -\pi$ и $n < -1$ тоже вычеркиваем.

Из всего многообразия корней остался лишь один: $x = 0$. Поэтому вычисляем значение функции для $x = 0$, $x = \pi/4$ и $x = -\pi/4$. Имеем:
$y(0) = 4\text{tg}\ 0 - 4 \cdot 0 + \pi - 5 = \pi - 5;$
$y(\pi/4) = 4\text{tg}\ \pi/4 - 4 \cdot \pi/4 + \pi - 5 = 1;$
$y(-\pi/4) = 4\text{tg}\ (-\pi/4) - 4 \cdot (-\pi/4) + \pi - 5 = ... = 2\pi - 9.$

Теперь заметим, что $\pi = 3{,}14... < 4$, поэтому $\pi - 5 < 4 - 5 < 0$и $2\pi - 9 < 8 - 9 < 0$. Получается одно положительное число и два отрицательных. Мы ищем наибольшее — очевидно, это $y = 1$.

Ответ 1

Заметим, что в последней задаче можно было и не сравнивать числа между собой. Ведь из чисел $\pi - 5$, 1 и $2\pi - 9$ в бланк ответов можно записать лишь единицу.

Действительно, как написать в бланке, скажем, число π? А никак. Это важная особенность первой части ЕГЭ по математике, которая значительно упрощает решение многих задач. И работает она не только в B14.

Случай пустого множества решений

Иногда при исследовании функции возникают уравнения, у которых нет корней. В таком случае задача становится еще проще, поскольку остается рассмотреть лишь концы отрезка.

Однако будьте предельно внимательны, поскольку такие задачи встречаются в ЕГЭ крайне редко. Если в процессе решения выясняется, что корней нет, лучше еще раз проверить все выкладки. И только когда убедитесь, что ошибок нет, можно расслабиться: вам досталась легкая задача!

Задача

Найдите наименьшее значение функции на отрезке $[-3\pi/2;\ 0]$:

$y = 7\sin x - 8x + 5$

Решение

Сначала находим производную:

$y' = (7\sin x - 8x + 5)' = 7\cos x - 8$

Попробуем решить уравнение:

$y' = 0 \Rightarrow 7\cos x - 8 = 0 \Rightarrow \cos x = 8/7$

Но значения $\cos x$ всегда лежат на отрезке $[-1; 1]$, а $8/7 > 1$. Поэтому корней нет.

Если корней нет, то и вычеркивать ничего не надо. Переходим к последнему шагу — вычисляем значение функции:
$y(-3\pi/2) = 7\sin(-3\pi/2) - 8 \cdot (-3\pi/2) + 5 = ... = 12\pi + 12$;
$y(0) = 7\sin 0 - 8 \cdot 0 + 5 = 5$.

Поскольку число $12\pi + 12$ в бланк ответов не записать, остается лишь $y = 5$.

Ответ 5