B10 Правила комбинаторики в задаче

Решая задачи по теории вероятностей, мы постоянно используем одну и ту же формулу, которая одновременно является классическим определением вероятности:

$$p = \frac{k}{n}$$

где k — число благоприятных исходов, n — общее число исходов

И эта формула прекрасно работает до тех пор, пока задачи были легкими, а числа, стоящие в числителе и знаменателе — очевидными.

Однако последние пробные экзамены показали, что в настоящем ЕГЭ по математике могут встречаться значительно более сложные конструкции. Отыскание значений n и k становится проблематичным. В таком случае на помощь приходит комбинаторика. Ее законы работают там, где искомые значения не выводятся непосредственно из текста задачи.

В сегодняшнем уроке не будет строгих формулировок и длинных теорем — они слишком сложны и, к тому же, совершенно бесполезны для решения настоящих задач B10. Вместо этого мы рассмотрим простые правила и разберем конкретные задачи, которые действительно встречаются на ЕГЭ. Итак, поехали!

Число сочетаний и факториалы

Определение:

Пусть имеется n объектов (карандашей, конфет, бутылок водки — чего угодно), из которых требуется выбрать ровно k различных объектов. Тогда количество вариантов такого выбора называется числом сочетаний из n элементов по k. Это число обозначается Cnkи считается по специальной формуле.

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Замечание:

Выражение $n!$ читается как «эн-факториал» и обозначает произведение всех натуральных чисел от 1 до n включительно: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n$.

Кроме того, в математике по определению считают, что 0! = 1 —подобный бред редко, но все же встречается в задачах по теории вероятностей.

Что дает нам эта формула? На самом деле, без нее не решается практически ни одна серьезная задача.

К сожалению, в школе совершенно не умеют работать с факториалами. Кроме того, в формуле числа сочетаний очень легко запутаться: где стоит и что обозначает число *n*, а где — *k*. Поэтому для начала просто запомните: меньшее число всегда стоит сверху — точно так же, как и в формуле определения вероятности (вероятность никогда не бывает больше единицы).

Задача

У бармена есть 6 сортов зеленого чая. Для проведения чайной церемонии требуется подать зеленый чай ровно 3 различных сортов. Сколькими способами бармен может выполнить заказ?

Решение

Тут все просто: есть $n = 6$ сортов, из которых надо выбрать $k = 3$ сорта. Число сочетаний можно найти по формуле:

$$C_6^3 = \frac{6!}{3!\,(6-3)!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \cdots = 20$$

Ответ 20

Задача

В группе из 20 студентов надо выбрать 2 представителей для выступления на конференции. Сколькими способами можно это сделать?

Решение

Опять же, всего у нас есть $n = 20$ студентов, а выбрать надо $k = 2$студента. Находим число сочетаний:

$$C_{20}^2 = \frac{20!}{2!\,(20-2)!} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot \ldots \cdot 1}{2 \cdot 1 \cdot 18 \cdot 17 \cdot \ldots \cdot 1} = \frac{20 \cdot 19}{2} = 190$$

Обратите внимание: красным цветом отмечены множители, входящие в разные факториалы. Эти множители можно безболезненно сократить и тем самым значительно уменьшить общий объем вычислений.

Ответ 190

Закон умножения

Закон умножения в комбинаторике: число сочетаний (способов, комбинаций) в независимых наборах умножается.

Другими словами, пусть имеется *A* способов выполнить одно действиеи *B* способов выполнить другое действие. Путь также эти действия независимы, т.е. никак не связаны между собой. Тогда можно найти число способов выполнить первое и второе действие по формуле:$C = A \cdot B$.

Задача

У Пети есть 4 монеты по 1 рублю и 2 монеты по 10 рублей. Петя, не глядя, достал из кармана 1 монету номиналом 1 рубль и еще 1 монету номиналом 10 рублей, чтобы купить сигарету за 11 рублей у бабули в подземном переходе. Сколькими способами он может выбрать эти монеты?

Решение

Итак, сначала Петя достает k = 1 монету из n = 4 имеющихся монет номиналом 1 рубль. Число способов сделать это равно C41 = ... = 4.

Затем Петя снова лезет в карман и достает k = 1 монету из n = 2имеющихся монет номиналом 10 рублей. Здесь число сочетаний равноC21 = ... = 2.

Поскольку эти действия независимы, общее число вариантов равноC = 4 · 2 = 8.

Ответ 8

Закон сложения

Если закон умножения оперирует «изолированными» событиями, которые не зависят друг от друга, то в законе сложения все наоборот. Здесь рассматриваются взаимоисключающие события, которые никогда не случаются одновременно.

Например, «Петя вынул из кармана 1 монету» и «Петя не вынул из кармана ни одной монеты» — это взаимоисключающие события, поскольку вынуть одну монету и при этом не вынуть ни одной невозможно.

Аналогично, события «Выбранный наугад шар — белый» и «Выбранный наугад шар — черный» также являются взаимоисключающими.

Определение

Закон сложения в комбинаторике: если два взаимоисключающих действия можно выполнить A и B способами соответственно, то эти события можно объединить. При этом возникнет новое событие, которое можно выполнить $X = A + B$ способами.

Другими словами, при объединении взаимоисключающих действий (событий, вариантов) число их комбинаций складывается.

Можно сказать, что закон сложения — это логическое «ИЛИ» в комбинаторике, когда нас устраивает любой из взаимоисключающих вариантов. И наоборот, закон умножения — это логическое «И», при котором нас интересует одновременное выполнение и первого, и второго действия.

Задача

В корзине лежат 9 черных шаров и 7 красных. Мальчик достает 2 шара одинакового цвета. Сколькими способами он может это сделать?

Решение

Если шары одинакового цвета, то вариантов немного: оба они либо черные, либо красные. Очевидно, что эти варианты — взаимоисключающие.

В первом случае мальчику предстоит выбирать k = 2 черных шараиз n = 9 имеющихся. Число способов сделать это равно C92 = ... = 36.

Аналогично, во втором случае выбираем k = 2 красных шара из n = 7возможных. Число способов равно C72 = ... = 21.

Осталось найти общее количество способов. Поскольку варианты с черными и красными шарами — взаимоисключающие, по закону сложения имеем: X = 36 + 21 = 57.

Ответ 57

Дополнительные условия и ограничения

Очень часто в тексте задачи присутствуют дополнительные условия, накладывающие существенные ограничения на интересующие нас сочетания. Сравните два предложения:

1. Имеется набор из 5 ручек разных цветов. Сколькими способами можно выбрать 3 ручки для обводки чертежа?
2. Имеется набор из 5 ручек разных цветов. Сколькими способами можно выбрать 3 ручки для обводки чертежа, если среди них обязательно должен быть красный цвет?

Чувствуете разницу? В первом случае мы вправе брать любые цвета, какие нам нравятся — дополнительных ограничений нет. Во втором случае все сложнее, поскольку мы обязаны выбрать ручку красного цвета (предполагается, что она есть в исходном наборе).

Очевидно, что любые ограничения резко сокращают итоговое количество вариантов. Ну и как в этом случае найти число сочетаний? Просто запомните следующее правило:

Пусть имеется набор из n элементов, среди которых надо выбратьk элементов. При введении дополнительных ограничений числа n и kуменьшаются на одинаковую величину.

Другими словами, если из 5 ручек надо выбрать 3, при этом одна из них должна быть красной, то выбирать придется из $n = 5 - 1 = 4$элементов по $k = 3 - 1 = 2$ элемента. Таким образом, вместо C53 надо считать C42.

Задача

В группе из 20 студентов, среди которых 2 отличника, надо выбрать 4 человека для участия в конференции. Сколькими способами можно выбрать этих четверых, если отличники обязательно должны попасть на конференцию?

Решение

Итак, есть группа из n = 20 студентов. Но выбрать надо лишь k = 4из них. Если бы не было дополнительных ограничений, то количество вариантов равнялось числу сочетаний C204.

Однако нам поставили дополнительное условие: 2 отличника должны быть среди этих четырех. Таким образом, согласно приведенному выше правилу, мы уменьшаем числа n и k на 2. Имеем:

$$C_{20-2}^{4-2} = C_{18}^{2} = \frac{18!}{2!(18-2)!} = \cdots = 153$$

Ответ 153

Задача

У Пети в кармане есть 8 монет, из которых 6 монет по рублю и 2 монеты по 10 рублей. Петя перекладывает какие-то три монеты в другой карман. Сколькими способами Петя может это сделать, если известно, что обе монеты по 10 рублей оказались в другом кармане?

Решение

Итак, есть $n = 8$ монет. Петя перекладывает $k = 3$ монеты, из которых 2 — десятирублевые. Получается, что из 3 монет, которые будут переложены, 2 уже зафиксированы, поэтому числа n и k надо уменьшить на 2. Имеем:

$$C_{8-2}^{3-2} = C_{6}^{1} = \frac{6!}{1!(6-1)!} = \cdots = 6$$

Ответ 6

В обоих примерах я намеренно пропустил детали работы с факториалами — попробуйте выполнить все расчеты самостоятельно. Разумеется, для этих задач существуют и другие способы решения. Например, с помощью закона умножения. В любом случае, ответ будет один и тот же.

В заключение отмечу, что в первой задаче мы получили 153 варианта — это намного меньше, чем исходные *C*204 = ... = 4845вариантов. Аналогично, 3 монеты из 8 можно переложить *C*83 = ... = 56способами, что значительно больше 6 способов, которые мы получили в последней задаче.

Эти примеры наглядно демонстрируют, что введение любых ограничений значительно сокращает нашу «свободу выбора».

Задачи B10 с монетами

Задачи на подбрасывание монет считаются довольно сложными. И перед тем как решать их, требуется небольшое пояснение. Задумайтесь, любая задача по теории вероятностей в итоге сводится к стандартной формуле:

$$p = \frac{k}{n}$$

где p — искомая вероятность, k — число устраивающих нас событий,n — общее число возможных событий.

Большинство задач B10 решаются по этой формуле буквально в одну строчку — достаточно прочитать условие. Но в случае с подбрасыванием монет эта формула бесполезна, поскольку из текста таких задач вообще не понятно, чему равны числа k и n. В этом и состоит вся сложность.

Тем не менее, существует как минимум два принципиально различных метода решения:

1. Метод перебора комбинаций — стандартный алгоритм. Выписываются все комбинации орлов и решек, после чего выбираются нужные;
2. Специальная формула вероятности — стандартное определение вероятности, специально переписанное так, чтобы было удобно работать с монетами.

Для решения задачи B10 надо знать оба метода. К сожалению, в школах изучают только первый. Не будем повторять школьных ошибок. Итак, поехали!

Метод перебора комбинаций

Этот метод еще называется «решение напролом». Состоит из трех шагов:

1. Выписываем все возможные комбинации орлов и решек. Например: OP, PO, OO, PP. Число таких комбинаций — это n;
2. Среди полученных комбинаций отмечаем те, которые требуются по условию задачи. Считаем отмеченные комбинации — получаем число k;
3. Осталось найти вероятность: $p = k : n$.

К сожалению, этот способ работает лишь для малого количества бросков. Потому что с каждым новым броском число комбинаций удваивается. Например, для 2 монет придется выписать всего 4 комбинации. Для 3 монет их уже 8, а для 4 — 16, и вероятность ошибки приближается к 100%. Взгляните на примеры — и сами все поймете:

Задача [Пробный ЕГЭ по математике 2012. Иркутск]

В случайном эксперименте симметричную монету бросают 2 раза. Найдите вероятность того, что орлов и решек выпадет одинаковое количество.

Решение

Итак, монету бросают два раза. Выпишем все возможные комбинации (О — орел, Р — решка):

ОО ОР РО РР

Итого $n = 4$ варианта. Теперь выпишем те варианты, которые подходят по условию задачи:
ОР РО

Таких вариантов оказалось $k = 2$. Находим вероятность:

$$p = \frac{k}{n} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 0,5$$

Ответ 0,5

Задача [Рабочая тетрадь «ЕГЭ 2012 по математике. Задачи B10»]

Монету бросают четыре раза. Найдите вероятность того, что решка не выпадет ни разу.

Снова выписываем все возможные комбинации орлов и решек:

ОООО ОООР ООРО ООРР ОРОО ОРОР ОРРО ОРРР
РООО РООР РОРО РОРР РРОО РРОР РРРО РРРР

Всего получилось *n* = 16 вариантов. Вроде, ничего не забыл. Из этих вариантов нас устраивает лишь комбинация «ОООО», в которой вообще нет решек. Следовательно, *k* = 1. Осталось найти вероятность:

$$p = \frac{k}{n} = \frac{1}{16} = 0{,}0625$$

Ответ 0,0625

Как видите, в последней задаче пришлось выписывать 16 вариантов. Вы уверены, что сможете выписать их без единой ошибки? Лично я — не уверен. Поэтому давайте рассмотрим второй способ решения.

Специальная формула вероятности

Итак, в задачах с монетами есть собственная формула вероятности. Она настолько простая и важная, что я решил оформить ее в виде теоремы. Взгляните:

Теорема

Пусть монету бросают *n* раз. Тогда вероятность того, что орел выпадет ровно *k* раз, можно найти по формуле:

$$p = \frac{C_n^k}{2^n}$$

Где *Cnk* — число сочетаний из *n* элементов по *k*, которое считается по формуле:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Таким образом, для решения задачи с монетами нужны два числа: число бросков и число орлов. Чаще всего эти числа даны прямо в тексте задачи. Более того, не имеет значения, что именно считать: решки или орлы. Ответ получится один и тот же.

На первый взгляд, теорема кажется слишком громоздкой. Но стоит чуть-чуть потренироваться — и вам уже не захочется возвращаться к стандартному алгоритму, описанному выше.

Задача [Рабочая тетрадь «ЕГЭ 2012 по математике. Задачи В10»]

Монету бросают четыре раза. Найдите вероятность того, что орел выпадет ровно три раза.

Решение

По условию задачи, всего бросков было *n* = 4. Требуемое число орлов:*k* =
3. Подставляем *n* и *k* в формулу:

$$p = \frac{C_4^3}{2^4} = \frac{\frac{4!}{3!\,(4-3)!}}{16} = \cdots = \frac{4}{16} = \frac{1}{4} = 0{,}25$$

С тем же успехом можно считать число решек: $k = 4 - 3 = 1$. Ответ будет таким же.
Ответ 0,25

Задача [Рабочая тетрадь «ЕГЭ 2012 по математике. Задачи B10»]

Монету бросают три раза. Найдите вероятность того, что решка не выпадет ни разу.

Решение

Снова выписываем числа n и k. Поскольку монету бросают 3 раза, $n = 3$. А поскольку решек быть не должно, $k = 0$. Осталось подставить числа n и k в формулу:

$$p = \frac{C_3^0}{2^3} = \frac{\frac{3!}{0!\,(3-0)!}}{8} = \cdots = \frac{1}{8} = 0{,}125$$

Напомню, что $0! = 1$ по определению. Поэтому $C30 = 1$.
Ответ 0.125

Задача [Пробный ЕГЭ по математике 2012. Иркутск]

В случайном эксперименте симметричную монету бросают 4 раза. Найдите вероятность того, что орел выпадет больше раз, чем решка.

Решение

Чтобы орлов было больше, чем решек, они должны выпасть либо 3 раза (тогда решек будет 1), либо 4 (тогда решек вообще не будет). Найдем вероятность каждого из этих событий.

Пусть $p1$ — вероятность того, что орел выпадет 3 раза. Тогда $n = 4, k = 3$. Имеем:

$$p_1 = \frac{C_4^3}{2^4} = \frac{\frac{4!}{3!\,(4-3)!}}{16} = \cdots = \frac{4}{16} = \frac{1}{4} = 0{,}25$$

Теперь найдем $p2$ — вероятность того, что орел выпадет все 4 раза. В этом случае $n = 4$, $k = 4$. Имеем:

$$p_2 = \frac{C_4^4}{2^4} = \frac{\frac{4!}{4!\,(4-4)!}}{16} = \cdots = \frac{1}{16} = 0{,}0675$$

Чтобы получить ответ, осталось сложить вероятности $p1$ и $p2$. Помните: складывать вероятности можно только для взаимоисключающих событий. Имеем:
$p = p1 + p2 = 0{,}25 + 0{,}0675 = 0{,}3175$

Ответ 0,3175